Chapitre 4

Nombres complexes

Ce chapitre vous permettra de faire le point sur les connaissances nécessaires pour travailler efficacement avec la TI-Nspire CAS sur les nombres complexes.

1. Choix du mode de fonctionnement

Format Complexe = Réel	Seuls les résultats réels pourront être affichés, sauf si l'on a explicitement demandé un calcul dans l'ensemble des nombres complexes, par exemple en utilisant **cFactor** ou **cSolve**, ou en introduisant une expression comportant le symbole $\boldsymbol{i}$.
Format Complexe = Rectangulaire	On travaille dans l'ensemble des nombres complexes, les résultats sont affichés sous la forme $a+ib$.
Format Complexe = Polaire	On travaille dans l'ensemble des nombres complexes, les résultats sont affichés sous la forme $r\,e^{i\theta}$.

Le choix du mode réel ou du mode complexe peut avoir des effets sur des calculs qui, en apparence, ne dépendent pas de ce mode. Ce choix s'effectue dans **Réglages du classeur** qui peut s'obtenir, par exemple, par la combinaison de touches : [on] [5] [2] [1].

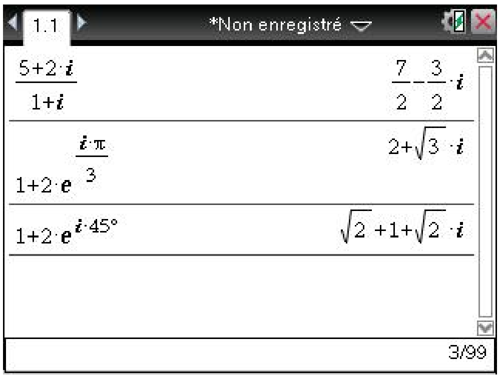
2. Écriture des nombres complexes

Pour l'affichage, le format des résultats dépend du choix fait dans la rubrique **Réel ou Complexe** de la boîte de dialogue **Réglages généraux**.

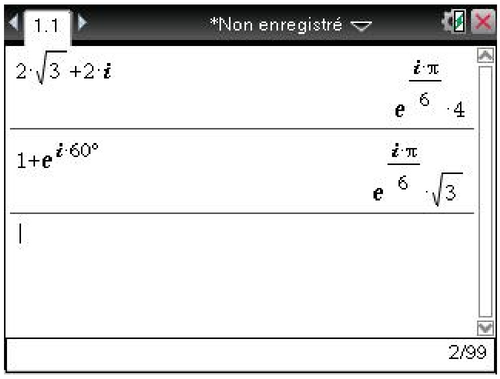
Pour la saisie, vous pouvez noter les complexes sous la forme $re^{i\theta}$, **à condition que la TI-Nspire CAS soit en mode Angle = Radian**, ou sous la forme $x+iy$.

Si vous avez besoin de rentrer des complexes sous forme polaire avec des angles en degrés, vous pouvez utiliser le symbole ° (touche [?!▸]).

Dans les exemples ci-dessous, l'écran de gauche a été obtenu en mode **Rectangulaire** (mêmes résultats en mode **Réel**), celui de droite en mode **Polaire**.



Mode **Rectangulaire** ou **Réel**



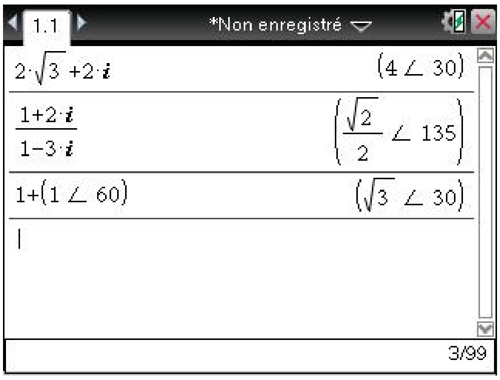
Mode **Polaire**

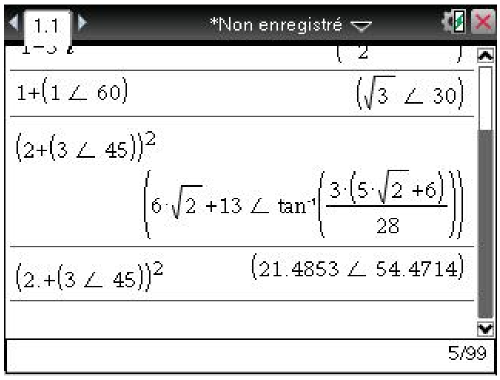
Pour un usage en mathématiques, ce qui précède est largement suffisant.

En physique, on peut avoir besoin d'obtenir l'expression polaire d'un complexe avec un argument exprimé en degrés.

Pour cela, choisissez le mode **Angle = Degré**,
et le mode **Réel ou Complexe = Polaire**.

Ces choix étant faits, vous devez utiliser la notation **(r ∠ θ)**, avec θ en degrés, pour entrer le nombre de module **r** et d'argument θ (vous obtiendrez le symbole ∠ dans la table de caractères [ctrl] [∞β°], les symboles ***i*** et π à l'aide de la touche [π▸] et le symbole ° touche [?!▸].
Vous obtiendrez un message d'erreur si vous écrivez **r*e^(*i*θ)**.





Pensez à revenir en mode **Angle = Radian** quand vous aurez fini de faire ces calculs.

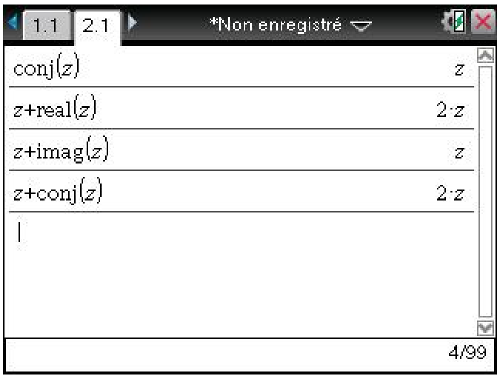
3. Complexes symboliques

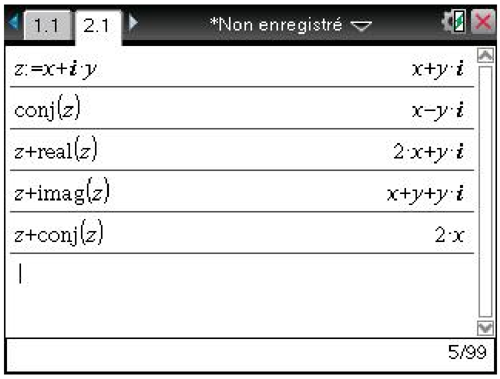
Par défaut, toutes les variables symboliques n'ayant pas encore de valeurs sont considérées comme étant des variables réelles. En conséquence, si l'on demande par exemple le conjugué de z, on obtiendra z. Pour la même raison le calcul de $\mathrm{Re}(z)+z$ nous donnera le résultat $2z$, et celui de $\mathrm{Im}(z)+z$ nous donnera z.

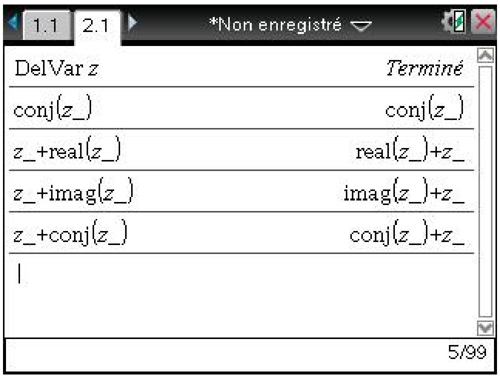
Il y a deux façons de contourner ce problème.

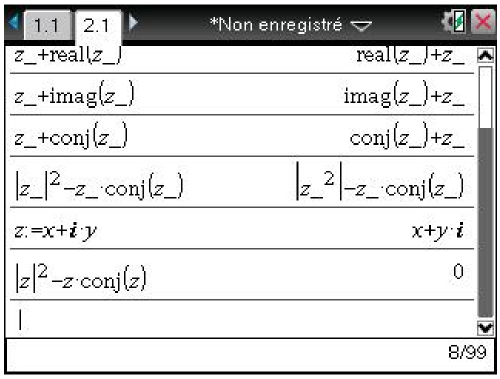
1. Placer dans z l'expression symbolique $x+i\,y$.
2. Déclarer à la calculatrice que la variable est en fait complexe en faisant suivre son nom du symbole _ ([ctrl] [⎵]).

On insère une nouvelle activité ([doc▾] [4] [1]), on choisit l'application Calculs.









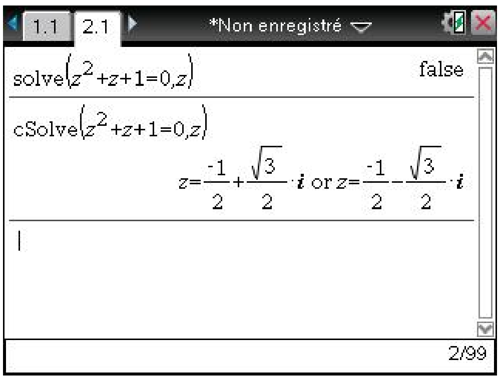
Dans le troisième écran, on peut voir qu'il n'y a pas eu de simplifications abusives.

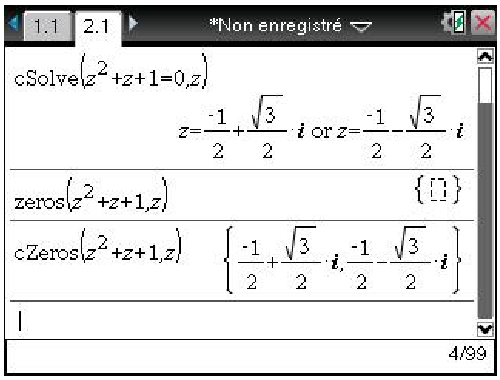
Mais il faut également constater dans le dernier écran que la TI-Nspire CAS a quelques difficultés à gérer convenablement ce type d'objet.

Nous savons que $z\overline{z} = |z|^2$. Pourtant, seule la solution consistant à placer $x + iy$ dans z permet de le vérifier.

4. Équations dans $\mathbb{C}$

Même lorsque l'on est en mode complexe, les fonctions **zeros** et **solve** ne recherchent que des racines réelles. Il faut impérativement utiliser **cZeros** et **cSolve** pour obtenir également des racines complexes.

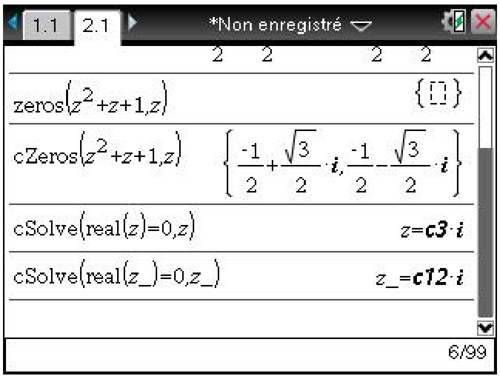




Attention également aux équations utilisant z et sa partie réelle, imaginaire, ou son conjugué.

On risque d'obtenir un résultat erroné en raison des simplifications automatiques décrites dans le paragraphe précédent.

Cherchons par exemple les nombres complexes de partie réelle nulle :



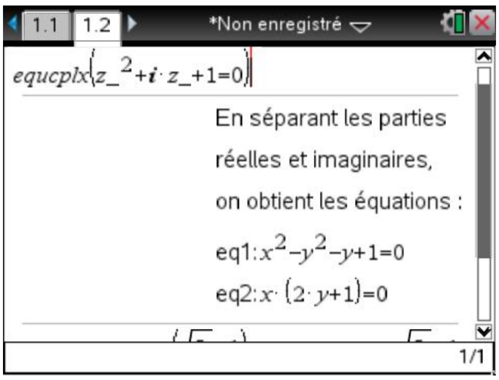
Dans la deuxième ligne, l'utilisation de **z_** permet d'obtenir un résultat correct, mais ceci ne sera pas toujours le cas, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

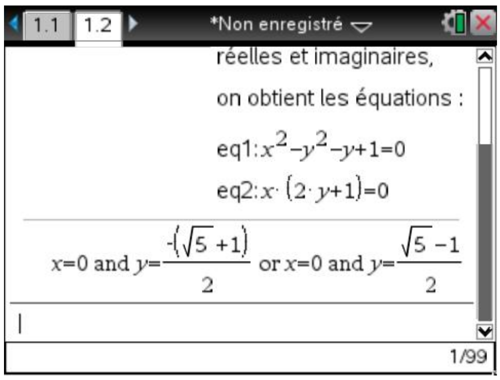
Nous reviendrons sur la résolution des équations dans le chapitre suivant (voir l'exercice 1 situé à la fin du **chapitre 5**).

Voici également le programme ci-dessous permettant de résoudre les équations dans le corps des complexes en se ramenant, en séparant partie réelle et partie imaginaire, à un système de deux équations réelles.

```
Define equcplx(eq)=
Func
Local eq1,eq2,sol
eq1:=real(eq|z_=x+i*y)
eq2:=imag(eq|z_=x+i*y)
Disp "En séparant les parties"
Disp "réelles et imaginaires,"
Disp "on obtient les équations :"
Disp "eq1:",eq1
Disp "eq2:",eq2
sol:=solve(eq1 and eq2,{x,y})
sol
EndFunc
```

Exemple d'utilisation :





Exercices

1 Caractérisation d'un triangle équilatéral

On considère un triangle défini par trois points A, B et C, d'affixes a, b et c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que ce triangle soit équilatéral.

2 Résolution d'une équation avec racines *n*-ièmes

Résoudre l'équation $\left(\dfrac{1-iz}{1+iz}\right)^n = 1$.

3 Transformation définie par une application *z* ↦ *f*(*z*)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O, on considère la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', tel que : $z' = \dfrac{3}{\overline{z}}$. Déterminer l'image du cercle de centre $\Omega(1,1)$ et de rayon 2.

Solutions des exercices

1 Caractérisation d'un triangle équilatéral

Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

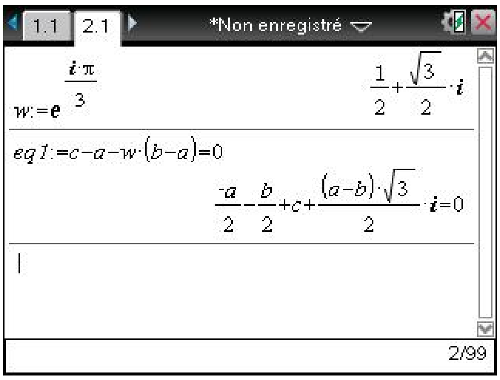
1. $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{3}\,(2\pi)$, ce qui est équivalent à $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

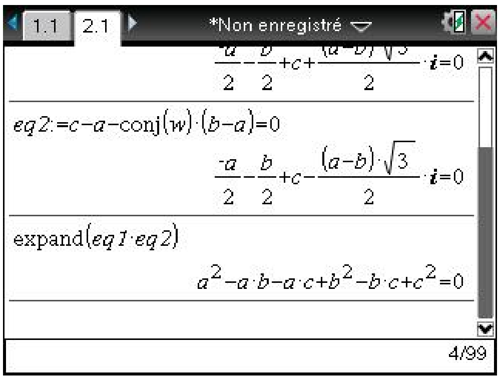
2. $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = -\dfrac{\pi}{3}\,(2\pi)$, ce qui est équivalent à $c - a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

On a donc : ABC équilatéral $\Leftrightarrow \begin{cases} c - a - e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) = 0 \\ \text{ou} \\ c - a - e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a) = 0 \end{cases}$

Il reste ensuite à avoir une petite idée... : $(X = 0 \text{ ou } Y = 0) \Leftrightarrow XY = 0$.

Le produit des deux équations ci-dessus permet donc d'obtenir la relation cherchée.



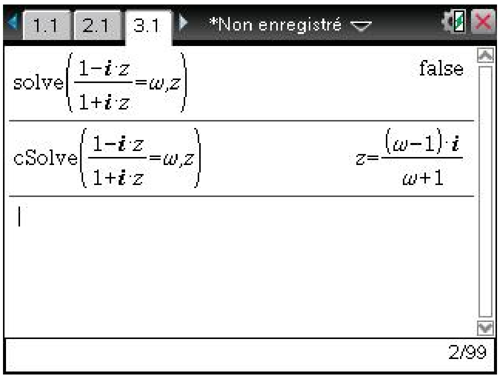


En conclusion, la relation cherchée est : $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$.

2 Résolution d'une équation avec racines *n*-ièmes

L'idée est en fait de résoudre $\dfrac{1-iz}{1+iz}=\omega$, avec $\omega=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k\in[\![0,n-1]\!]$.

Si l'on souhaite obtenir une étape intermédiaire, on peut demander à la TI-Nspire CAS de résoudre cette équation



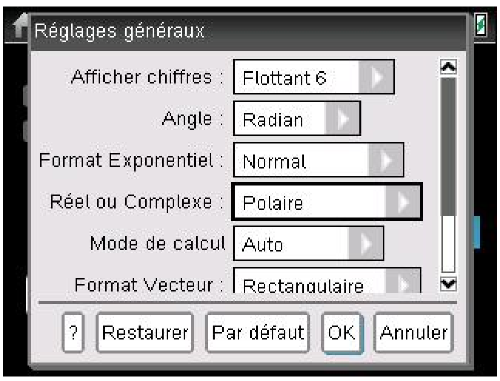
On pourra remarquer que la résolution n'est pas toujours valide (le dénominateur est nul si $\omega=-1$, ce qui se produit lorsque *n* est pair pour $k=n/2$,...)
Notons également que l'utilisation de **cSolve** est indispensable.

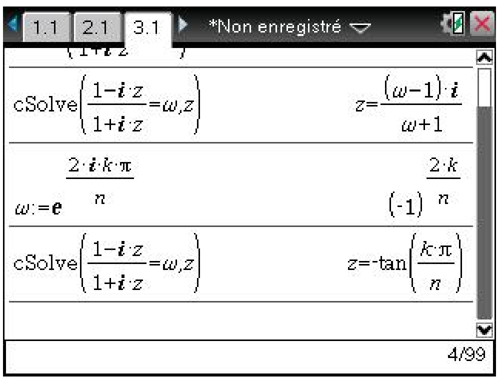
Pour conclure, il reste à remarquer que $\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}=\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\cdot\dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}=\dfrac{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}=i\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

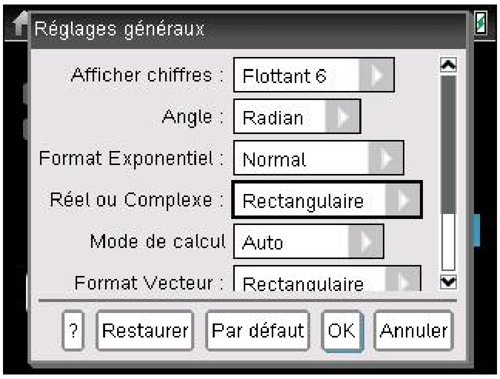
et donc $z=-\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=-\tan\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$. (On retrouve la condition $k\neq\dfrac{n}{2}$ lorsque *n* est pair.)

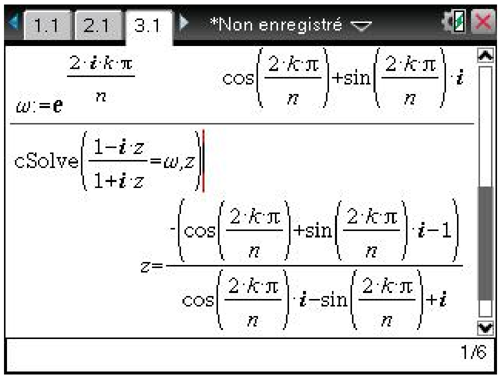
Voyons à présent ce que donne la résolution directe avec la TI-Nspire CAS.

La forme obtenue pour les résultats est radicalement différente suivant le choix effectué pour la représentation des nombres complexes.





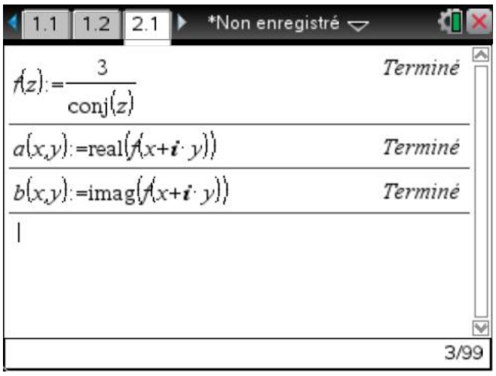




Naturellement, il est possible de simplifier cette seconde expression, et de retrouver ainsi le résultat précédent... mais ce n'est pas totalement évident.

3 Transformation définie par une application $z \mapsto f(z)$

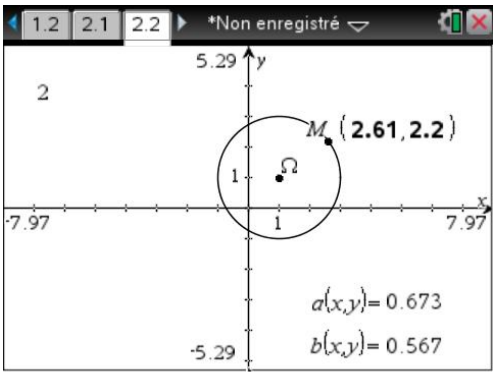
Nous allons représenter à l’aide de l’application Graphiques l’ensemble des points recherchés. On ouvre un nouveau classeur avec l’application Calculs et on définit les fonctions, comme indiqué dans l’écran suivant :



On ouvre une nouvelle page avec l’application Graphiques. On construit le cercle initial de centre $\Omega(1,1)$ et de rayon 2. On place un point M sur ce cercle. On affiche ses coordonnées.

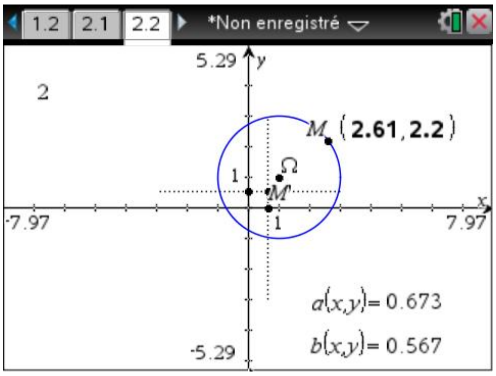
À l’aide de l’outil texte, on crée deux champs textes, on place les formules de calculs des coordonnées du point image $a(x,y)$ et $b(x,y)$.

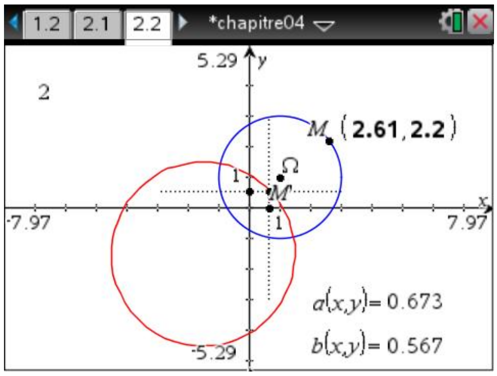
On utilise l'outil **Calculer** pour obtenir les valeurs correspondantes à partir des coordonnées de M.



L'outil **Report de mesure** du menu **Constructions** permet de reporter les valeurs trouvées sur les deux axes.

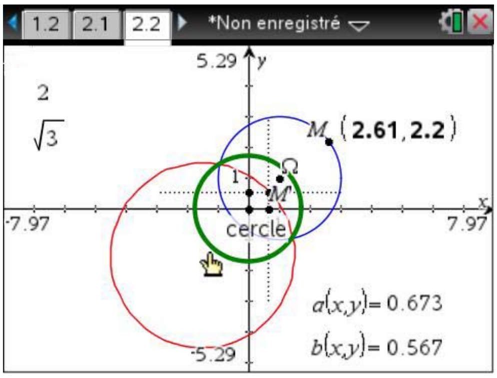
On utilise alors l'outil **Perpendiculaire** du menu **Constructions** pour construire le point M'. Enfin l’outil **Lieu** du même menu permet de se faire une idée du lieu de M' quand M décrit le cercle initial (voir écran de droite ci-après).

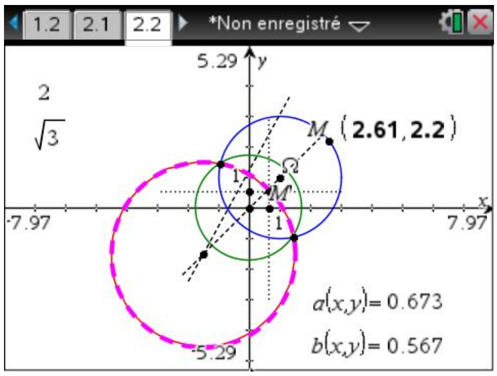




Il semble que M' décrive un cercle quand M décrit le cercle de centre $\Omega(1,1)$ et de rayon 2.

On remarque que l’ensemble des points invariants de cette transformation vérifient $z.\overline{z} = |z|^2 = 3$, c’est donc le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$. Les deux points d’intersection de ce cercle avec le cercle initial sont donc invariants, à l’aide de l’image d’un troisième point on peut construire le cercle.





Il ne reste plus qu’à démontrer que l’ensemble des points cherchés est bien le cercle obtenu sur la figure…